Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 3 – 8

КОНЕЧНЫЕ ПОДГРУППЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ n-КРУЧЕНЫХ ГРУПП

А. Л. ГЕВОРГЯН, Г. Г. ГЕВОРГЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *amirjan.gevorgian@googlemail.com*; *gevorgyan512@gmail.com*

Аннотация. Группа называется n-крученой, если она имеет систему определяющих соотношений вида $r^n = 1$ для некоторых элементов r и для любого ее элемента a конечного порядка выполняется соотношение $a^n = 1$. В работе доказывается, что все конечные подгруппы относительно свободных n-крученых групп являются циклическими группами. Отметим, что для каждого ранга $m > 1$ и для любого нечетного $n \geq 1003$ множество неизоморфных относительно свободных n-крученых групп ранга m континуально.

MSC2010 number: 20E07; 20F05; 20F50.

Ключевые слова: относительно свободная группа; конечная подгруппа; периодическая группа; n-крученая группа.

1. Введение

Пусть X – произвольный групповой алфавит, $\mathcal{R}$ – некоторое множество записанных в этом алфавите слов, $n > 1$ фиксированное натуральное число и

$$G = \langle X | R^n = 1, R \in \mathcal{R} \rangle \qquad (1.1)$$

задание некоторой группы G.

Определение 1.1. *Группа* (1.1) *является n-крученой, если для любого элемента $Y \in G$ либо $Y^n = 1$, либо Y имеет бесконечный порядок.*

Понятие n-крученой группы было введено в работе [1], где доказаны также некоторые важные свойства этих групп. Класс n-крученых групп достаточно обширен. Нетрудно заметить, что свободные группы любого ранга m, а также свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ являются n-кручеными группами для любого натурального n. Как указано в [1], помимо этих групп n-кручеными являются также группы $B(m, n, \alpha)$, $\Gamma(m, n, \Pi)$, $m \geq 1$ (множество которых континуально), свободные группы многообразия, удовлетворяющего тождеству $[x, y]^n = 1$ и т.д. (см. [2]–[4]). Некоторые другие группы, которые, по сути, являются n-кручеными, были построены и изучены в работах С. И. Адяна, А. Ю. Ольшанского, С. В. Иванова, И. Г. Лысенка, В. С. Атабекяна и других авторов (см., например, [5]–[11]).

Предложение 1.1. *Если F – абсолютно свободная группа и N – такая ее нормальная подгруппа, что фактор группа F/N является группой без кручения, то группа F/N^n – n-крученая группа для любого $n \geq 1$, где N^n – подгруппа порожденная n-ыми степенями всех элементов из n.*

Доказательство. Во первых, очевидно, для группы F/N^n можно выбрать систему определяющих соотношений вида $r^n = 1$, где r пробегает множество N. Допустим, что элемент $a \in F/N^n$ имеет конечный порядок. Тогда его образ в фактор группе F/N тоже имеет конечный порядок и поэтому тривиален. Это означает, что $a \in N/N^n$. Остается заметить, что группа N/N^n – периодическая группа периода n. □

Напоминаем, что при любом нечетном $n \geq 1003$ через $\Gamma(m, n, \Pi)$ обозначается свободная группа ранга m многобразия групп, определяемого следующим семейством тождеств от двух переменных

$$\{(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1\}, \tag{1.2}$$

где параметр p пробегает произвольное множество простых чисел Π. Эти знаменитые группы были построены С.И.Адяном в [2] (см. также [3], гл. VII) для решения проблемы конечного базиса, поставленной Б.Нейманом в 1937 г. Некоторые другие интересные свойства групп $\Gamma(m, n, \Pi)$ были изучены в [11]. В работе [12] доказано, что любая подгруппа каждой свободной группы $\Gamma(m, n, \Pi)$ произвольного ранга $m \geq 1$ является циклической группой. Аналогичное утверждение для свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 665$ и любого ранга раннее было доказано С. И. Адяном в [3] (см. гл. VII [3]) (для абсолютно свободных групп оно – просто доказуемое утверждение).

Нами будет доказана следующая более общая теорема.

Теорема 1.1. *Любая конечная подгруппа каждой относительно свободной n-крученой группы является циклической группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

2. Определения и вспомогательные леммы

Как и в [12], доказательство будем проводить по схеме, предложенной в главе VII монографии [3]. Сначала построим центральные расширения групп рассматриваемых относительно свободных групп и применив метод доказательства теоремы 1 из [3, гл. VII], с помощью теоремы Бэра завершим доказательство.

Пусть $\Gamma(X)$ – произвольная n-крученая группа с множеством свободных порождающих X. Согласно [1], группа $\Gamma(X)$ имеет специальную систему определяющих соотношений вида $A^n = 1$:

$$\Gamma_G(X) = \langle X \mid A^n = 1,\, A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \rangle. \tag{2.1}$$

Следуя [1], через $\Gamma(X,\alpha)$ обозначим группу с теми же образующими X и системой определяющих соотношений $A^n = 1$, где $A \in \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{E}_\alpha$:

$$\Gamma_G(X,\alpha) = \langle X \mid A^n = 1,\, A \in \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{E}_\alpha \rangle.$$

Далее, обозначим

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha. \tag{2.2}$$

Следующие 3 леммы доказанны в [1].

Лемма 2.1. *(Лемма 8, [1]) Для любого слова C, которое не равно 1 в группе $\Gamma(X)$, можно указать такие слова T и E, что $C = TE^rT^{-1}$ в $\Gamma_G(X)$ при некотором целом r, где либо $E \in \mathcal{E}$, либо E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.*

Лемма 2.2. *(Лемма 6, [1]) Если E есть отмеченный элементарный период некоторого ранга $\gamma \geq 1$ (или если $E \in \mathcal{E}_\gamma$), то E имеет порядок n в группе $\Gamma(X,\gamma)$ (и в группе $\Gamma(X)$).*

Лемма 2.3. *(Лемма 7, [1]) Если E есть неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ, то E имеет бесконечный порядок в $\Gamma(X)$.*

Множество $\mathcal{E}$ счетно (см. теорему 2.13 главы VI из [3]), т.е. его элементы можно пронумеровать натуральными числами. Фиксируем некоторую нумерацию и пусть $\mathcal{E} = \{A_j | j \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел).

Фиксируем также произвольную не более чем счетную абелеву группу $\mathcal{D}$, заданную порождающими и определяющими соотношениями:

$$\mathcal{D} = \langle d_1, d_2, \dots, d_i, \dots \mid r = 1,\, r \in \mathcal{R} \rangle, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{R}$ – некоторое множество слов в групповом алфавите $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots$.

Через $A_{\mathcal{D}}(X)$ обозначим группу, заданную системой образующих двух видов

$$X \cup \{d_1, d_2, ..., d_i, ...\} \tag{2.4}$$

и системой определяющих соотношений трех видов:

$$r = 1, \text{ для всех } r \in \mathcal{R},$$

$$\forall x \in X \quad x d_j = d_j x,$$

$$A_j^n = d_j \tag{2.5}$$

для всех $A_j \in \mathcal{E}$ (см. (2.2)) и $j \in \mathbb{N}$.

Из соотношений (2.5) вытекает, что группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ тоже порождаются множеством порождающих X. Для групп $A_{\mathcal{D}}X)$ справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. *При любом нечетном $n \geq 1003$ для любой абелевой группы $\mathcal{D}$, имеющей задание (2.3), выполняются условия:*

1. центр группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ совпадает с $\mathcal{D}$,

2. фактор группа группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ по подгруппе $\mathcal{D}$ изоморфна группе $\Gamma(X)$.

Предложение 2.1 доказывается точно также как и пункты 3, 4 теоремы 1 из [11]. В качестве группы $\mathcal{D}$ возьмем бесконечную циклическую группу

$$\mathcal{Z} = \langle d_1, d_2, \dots, d_i, \dots \mid d_j d_k^{-1} = 1,\, j, k \in \mathbb{N} \rangle.$$

Тогда центром полученной группы $A_{\mathcal{Z}}(X)$ будет бесконечная циклическая группа с порождающим $d = d_1$.

Лемма 2.4. *Грусппа $A_{\mathcal{Z}}(X)$ является группой без кручения.*

Доказательство. В силу пункта 2 предложения 2.1 всякий нетривиальный элемент a группы $A_{\mathcal{Z}}(X)$ можно представить в виде $a = yd^j$, где y есть слово в порождающих группы $\Gamma(X)$, а d порождающий элемент ее центра. Покажем, что a имеет бесконечный порядок.

Если $y \neq 1$ в $\Gamma(X)$, то в силу леммы 2.1 найдутся такие слова T и E, что $y = TE^rT^{-1}$ в группе $\Gamma(X)$ при некотором целом r, причем или $E \in \mathcal{E}$, или E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. В силу пункта 1 предложения 2.1, центр группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом d. При $y = 1$ утверждение теоремы очевидно. Остается рассмотреть случай, когда $y \neq 1$ в $\Gamma(X)$. В случае, когда E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$, то по лемме 2.3, элемент E, а значит и y, имеет бесконечный порядок в фактор группе $\Gamma(X)$. Тогда его прообраз a в $A_{\mathcal{D}}(X)$ тоже имеет бесконечный порядок.

Если же $E \in \mathcal{E}$, то используя лемму 2.2, мы буквально повторив доказательство теоремы 1.6 из [3] убедимся, что a имеет бесконечный порядок. $\square$

3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть конечная подгруппа G группы $\Gamma(X)$ порождается элементами $g_1, g_2, ..., g_k$. Рассмотрим подгруппу G_1 группы $A_{\mathcal{Z}}(X)$, порождаемую элементами $g_1, g_2, ..., g_k, d$. Согласно пункту 1 предложения 2.1 элемент d содержится в центре группы G_1. Следовательно, фактор группа группы G_1 по ее центру конечна.

По известной теореме Бэра (см. [14]) из конечности фактор группы по центру следует конечность коммутанта. Следовательно, коммутант группы G_1 конечен. Так как, по лемме 2.4, группа $A_{\mathcal{Z}}(X)$ является группой без кручения, то в ней конечна только единичная подгруппа. Значит коммутант группы G_1 тривиален, т.е. G_1 является абелевой группой. Поэтому, образ G в $\Gamma(X)$ группы G_1 тоже является абелевой группой. В силу следствия 2 работы [1] всякая абелева подгруппа группы $\Gamma(X)$ – циклическая группа. Таким образом G – циклическая подгруппа. Теорема доказана.

Abstract. A group is called an n-torsion group if it has a system of defining relations of the form $r^n = 1$ for some elements r, and for any of its finite order element a the defining relation $a^n = 1$ holds. In this paper, we prove that all the finite subgroups of the relatively free n-torsion groups are cyclic groups. Note that for each rank $m > 1$ and for any odd $n \geq 1003$, the set of nonisomorphic relatively free n-torsion groups of rank m has the cardinality of the continuum.

Список литературы

[1] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, "n-torsion groups", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **54**, no. 6, 319 – 327 (2019).

[2] S. I. Adjan, "Infinite irreducible systems of group identities", Math. USSR-Izv., **4**, no. 4, 721 – 739 (1970).

[3] S. I. Adian, "The Burnside problem and identities in groups", Springer-Verlag, Berlin-New York, Results in Mathematics and Related Areas, **95** (1979).
[4] S. I. Adyan, "Groups with periodic commutators", Dokl. Math., **62**, no. 2, 174 – 176 (2000).
[5] A. Yu. Olshanskii, The Geometry of Defning Relations in Groups, Kluwer Academic Publishers (1991).
[6] S. V. Ivanov, "The free Burnside groups of sufficiently large exponents", Int. J. of Algebra and Computation, **4**, 1 – 307 (1994).
[7] I. G. Lysenok, "Infinite Burnside groups of even exponent", Izv. Math., **60**, no. 3, 453 – 654 (1996).
[8] V. S. Atabekyan, "Monomorphisms of free Burnside groups", Math Notes, **86**, 457 – 462 (2009). https://doi.org/10.1134/S0001434609090211
[9] V. S. Atabekyan, "Splitting automorphisms of free Burnside groups", Sb. Math., **204**, no. 2, 182 – 189 (2013).
[10] V. S. Atabekyan, H. T. Aslanyan, "The automorphisms of endomorphism semigroups of relatively free groups", International Journal of Algebra and Computation, **28**, no. 02, 207 – 215 (2018).
[11] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, "On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian", Izv. Math., **81**, no. 5, 889 – 900 (2017).
[12] H. T. Aslanyan, A. L. Gevorgyan, H. A. Grigoryan, "Finite subgroups of the free groups of the infinitely based varieties of S. I. Adian", Armenian Journal of Mathematics, **11**, no. 06, 1 – 6 (2019).
[13] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, "Central extensions of free periodic groups", Sb. Math., **209**, no. 12, 1677 – 1689 (2018).
[14] R. Baer, "Endlichkeitskriterien fur Kommutatorgruppen", Math. Aim., **124**, 161 – 177 (1952).

Поступила 7 августа 2019

После доработки 7 октября 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019